Министерство Образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»

А. В. Бузланов, В. С. Монахов, В. В. Подгорная,
И. Л. Сохор

ГЕОМЕТРИЯ И АЛГЕБРА.
ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

ПРАКТИКУМ
в четырех частях
для студентов математических
специальностей вузов.
Часть 2

Гомель 2016

УДК
ББК
Б

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом учреждения образования "Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины"

Бузланов А. В.

Б Геометрия и алгебра. Линейная алгебра : практикум : в 4 ч. / А. В. Бузланов [и др.].; Мин-во обр. РБ, Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины. — Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины. — 2016. — Ч. 2. — 45 с.

Практикум включает разделы линейной алгебры. По каждой теме изложены элементы теории, приведены образцы решения типовых задач, предложены 15 вариантов индивидуальных заданий. Практикум адресован студентам математических специальностей вузов. Может быть использован студентами других специальностей, изучающими вопросы алгебры.

Вторая часть практикума содержит разделы "Подпространства линейного пространства"; "Линейные отображения линейных пространств".

УДК
ББК

3 ПОДПРОСТРАНСТВА ЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВА

3.1 Элементы теории

3.1.1 Подпространство линейного пространства

Непустое множество W векторов линейного пространства V над полем P называется *подпространством*, если $\bar{x}+\bar{y}\in W$ и $\alpha\bar{x}\in W$ для любых $\bar{x}$, $\bar{y}\in W$ и любого элемента $\alpha\in P$.

Линейное пространство V является своим подпространством. Множество $\{\bar{0}\}$, состоящее из одного нулевого элемента линейного пространства V, является подпространством этого пространства и называется *нулевым подпространством.*

3.1.2 Сумма и пересечение подпространств линейного пространства

Пусть W_1, W_2, $\ldots$, W_k — конечная система подпространств линейного пространства V над полем P. *Суммой этих подпространств* называется множество

$$\{\bar{x}\in V \mid \bar{x}=\bar{x}_1+\bar{x}_2+\ldots+\bar{x}_k, \bar{x}_1\in W_1,\ldots,\bar{x}_k\in W_k\}.$$

Обозначается сумма подпространств $\sum\limits_{i=1}^{k} W_i$ или W_1+W_2+ $+\ldots+W_k$.

Лемма 3.1. *Сумма конечного множества подпространств W_1, W_2, $\ldots$, W_k линейного пространства V над полем P является подпространством V.*

Пересечением подпространств $W_1, W_2, \ldots, W_k$ называется множество $\{\bar{x} \in V \mid \bar{x} \in W_i, i = 1, 2, \ldots, k\}$, которое обозначается символом $\bigcap\limits_{i=1}^{k} W_i$ или $W_1 \cap W_2 \cap \ldots \cap W_k$.

Лемма 3.2. *Пересечение конечного множества подпространств* $W_1, W_2, \ldots, W_k$ *линейного пространства* V *над полем* P *является подпространством* V.

3.1.3 Базис и размерность подпространства линейного пространства

Всякое подпространство W линейного пространства V над полем P само является линейным пространством над этим полем, относительно тех же операций, которые определены в линейном пространстве V. Поэтому можно говорить о таких понятиях, как базис и размерность подпространства.

Лемма 3.3. *Каждое подпространство* W n*-мерного линейного пространства* V *конечномерно,* $\dim W \leqslant n$. *Если* $\dim W = n$, *то* $W = V$.

Теорема 3.4. *Пусть* U *и* W *— конечномерные подпространства линейного пространства* V *над полем* P. *Тогда* $\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$.

Эту формулу называют *формулой Грассмана.*

3.1.4 Прямая сумма подпространств линейного пространства

Сумма подпространств $W_1, W_2, \ldots, W_k$ линейного пространства V называется *прямой суммой*, если каждое подпространство W_i пересекается с суммой остальных подпространств по нулевому подпространству. Обозначается прямая сумма подпространств $W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_k$ или $\bigoplus\limits_{i=1}^{k} W_i$.

Теорема 3.5. *Справедливы следующие утверждения:*

1) для того, чтобы сумма $S = W_1 + W_2 + \ldots + W_k$ *подпространств* $W_1, W_2, \ldots, W_k$ *линейного пространства* V *над полем* P *была прямой, необходимо и достаточно, чтобы любой элемент* $\bar{x} \in S$ *единственным образом представлялся в виде* $\bar{x} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \ldots + \bar{x}_k$*, где* $\bar{x}_i \in W_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$*;*

2) пусть $S = W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_k$*, где* $W_1, W_2, \ldots, W_k$ *— подпространства линейного пространства* V *над полем* P*. Если* $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$ *— базис* $W_1, \ldots, \bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_m$ *— базис* W_k*, то* $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n, \ldots, \bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_m$ *— базис* S*, причем* $\dim S = \dim W_1 + \dim W_2 + \ldots + \dim W_k$.

3.1.5 Линейная оболочка системы векторов

Пусть $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ — система векторов линейного пространства V над полем P. Множество всех линейных комбинаций векторов системы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ с коэффициентами из поля P называется *линейной оболочкой системы векторов* $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ и обозначается $L(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n)$. Таким образом,

$$L(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n) =$$
$$= \{\lambda_1 \bar{a}_1 + \ldots + \lambda_n \bar{a}_n \mid \lambda_i \in P, i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Лемма 3.6. *Линейная оболочка* $L(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n)$ *системы векторов* $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ *линейного пространства* V *является подпространством* V.

Теорема 3.7. *Справедливы следующие утверждения:*

1) если $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\ldots$, $\bar{e}_k$ *— базис подпространства* U *линейного пространства* V*, то* $U = L(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n)$*;*

2) если $U = L(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_k)$*,* $W = L(\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_m)$*, то* $U + W = L(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_k, \bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_m)$*.*

3.2 Примеры решения задач

Пример 3.1. Является ли подпространством линейного пространства $\mathbb{R}_n[x]$ множество всех многочленов $f(x)$, удовлетворяющих условию $2f(1) - f(2) = 0$?

□ Пусть K — данное множество многочленов, т. е.

$$K = \{f(x) \in \mathbb{R}_n[x] \mid 2f(1) - f(2) = 0\}.$$

Пусть $f_1(x), f_2(x) \in K$. Тогда $2f_1(1) - f_1(2) = 0$ и $2f_2(1) - f_2(2) = 0$.

Покажем, что $f_1(x) + f_2(x) \in K$.

$$2(f_1 + f_2)(1) - (f_1 + f_2)(2) =$$
$$= 2(f_1(1) + f_2(1)) - (f_1(2) + f_2(2)) =$$
$$= (2f_1(1) - f_1(2)) + (2f_2(1) - f_2(2)) = 0 + 0 = 0.$$

Следовательно, $f_1(x) + f_2(x) \in K$.

Покажем, что $\alpha f_1(x) \in K$ для любого $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$2(\alpha f_1)(1) - (\alpha f_1)(2) = 2(\alpha f_1(1)) - \alpha f_1(2) =$$
$$= \alpha(2f_1(1) - f_1(2)) = \alpha \cdot 0 = 0.$$

Следовательно, $\alpha f_1(x) \in K$.

Таким образом, по определению, K — подпространство линейного пространства $\mathbb{R}_n[x]$.

Ответ: является. ⊠

Пример 3.2. Найдите размерность и базис линейной оболочки $L(\bar{a}_1,\ \bar{a}_2,\ \bar{a}_3,\ \bar{a}_4)$ системы векторов из $\mathbb{R}^4$, если

$\bar{a}_1 = (1, -1, 3, -2), \bar{a}_2 = (-2, 1, -4, 1), \bar{a}_3 = (-1, 0, -1, -1),$ $\bar{a}_4 = (-3, 1, -5, 0).$

$\square$ Составим матрицу A, строками которой являются векторы $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$, $\bar{a}_4$, и приведем ее к ступенчатому виду.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & -5 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[IV+I\cdot 3]{II+I\cdot 2, III+I}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 4 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[IV+II\cdot(-2)]{III+II\cdot(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы A равен размерности $L(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4)$, т. е. $\dim L(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4) = 2$.

Чтобы найти базис линейной оболочки, надо пользоваться следующим правилом: в матрице A строки соответствуют векторам $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$, $\bar{a}_4$, соответственно. По ходу элементарных преобразований при перестановке строк надо следить за соответствием строк векторам. Базис образуют векторы, которые соответствуют ненулевым строкам в ступенчатой матрице.

Так как при приведении матрицы A к ступенчатому виду строки не менялись местами, то в ступенчатой матрице ненулевые строки соответствуют векторам $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$. Следовательно, $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$ образуют базис линейной оболочки $L(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4)$.

Ответ: $\dim L(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4) = 2$; $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$ — базис. $\boxtimes$

Пример 3.3. Найдите базис и размерность линейной оболочки $L(z_1, z_2)$ системы векторов действительного линейного пространства $\mathbb{C}$, если $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = -1 + 4i$.

$\square$ Составим матрицу A, строки которой составлены из чисел a и b для каждого комплексного числа $z = a + bi$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Приведем матрицу A к ступенчатому виду.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{I \leftrightarrow II} \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{II + I \cdot 2} \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $\dim L(z_1, z_2) = 2$, z_2 и z_1 — базис $L(z_1, z_2)$.

Ответ: z_2, z_1 — базис $L(z_1, z_2)$, $\dim L(z_1, z_2) = 2$. $\boxtimes$

Пример 3.4. Будет ли $L(f_1, f_2, f_3) = \mathbb{R}_2[x]$, если $f_1 = -2x^2 + 3x - 1$, $f_2 = x^2 - 2x + 4$, $f_3 = -x^2 + 5x - 2$?

$\square$ Если $\dim L(f_1, f_2, f_3) = \dim \mathbb{R}_2[x]$, то по лемме 3.3 $L(f_1, f_2, f_3) = \mathbb{R}_2[x]$. Если же $\dim L(f_1, f_2, f_3) < \dim \mathbb{R}_2[x]$, то $L(f_1, f_2, f_3) \neq \mathbb{R}_2[x]$. Известно, что $\dim \mathbb{R}_2[x] = 3$.

Найдем размерность $L(f_1, f_2, f_3)$. Составим матрицу A, строки которой составлены из коэффициентов при степенях x, и приведем ее к ступенчатому виду.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{I \leftrightarrow II} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[III + I]{II + I \cdot 2}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{III + II \cdot 3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 19 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $\dim L(f_1, f_2, f_3) = 3$ и $L(f_1, f_2, f_3) = \mathbb{R}_2[x]$.

Ответ: да. $\boxtimes$

Пример 3.5. Найдите базис и размерность линейной оболочки $L(A_1, A_2, A_3)$ векторов линейного пространства $M(2,\mathbb{R})$, если

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\square$ Составим матрицу A, строками которой являются последовательности элементов строк матриц A_1, A_2, A_3:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Приведем матрицу A к ступенчатому виду

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{I \leftrightarrow III} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[III+I\cdot(-3)]{II+I\cdot 2}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 8 & 5 \\ 0 & 7 & -5 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{III\cdot 5+II\cdot 7} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 31 & 40 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $\dim L(A_1, A_2, A_3) = 3$, а векторы A_3, A_2, A_1 — базис $L(A_1, A_2, A_3)$.

Ответ: $\dim L(A_1, A_2, A_3) = 3$, векторы A_3, A_2, A_1 — базис $L(A_1, A_2, A_3)$. $\boxtimes$

Пример 3.6. Найдите размерность пересечения подпространств $L(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3)$ и $L(\bar{b}_1, \bar{b}_2)$ линейного пространства $\mathbb{R}^3$. Принадлежит ли вектор $\bar{x}$ подпространствам $L(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3)$ и $L(\bar{b}_1, \bar{b}_2)$, если $\bar{a}_1 = (1, -2, 3)$, $\bar{a}_2 = (2, -1, 4)$, $\bar{a}_3 = (1, -1, 0)$, $\bar{b}_1 = (-2, 1, 3)$, $\bar{b}_2 = (-1, 0, 2)$, $\bar{x} = (1, 4, 1)$?

$\square$ Воспользуемся формулой Грассмана

$$\dim(L(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3) + L(\bar{b}_1, \bar{b}_2)) = \dim L(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3) + \\ + \dim L(\bar{b}_1, \bar{b}_2) - \dim(L(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3) \cap L(\bar{b}_1, \bar{b}_2)).$$

Так как $L(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3) + L(\bar{b}_1, \bar{b}_2) = L(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{b}_1, \bar{b}_2)$, то из формулы Грассмана

$$\dim(L(\bar a_1, \bar a_2, \bar a_3) \cap L(\bar b_1, \bar b_2)) =$$
$$= \dim L(\bar a_1, \bar a_2, \bar a_3) + \dim L(\bar b_1, \bar b_2) - \dim L(\bar a_1, \bar a_2, \bar a_3, \bar b_1, \bar b_2).$$

1) Находим размерность подпространства $L(\bar a_1, \bar a_2, \bar a_3)$. Для этого находим ранг матрицы A, строками которой являются векторы $\bar a_1$, $\bar a_2$, $\bar a_3$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[III+I\cdot(-1)]{II+I\cdot(-2)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[II\leftrightarrow III]{II+III\cdot(-3)}$$
$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Так как ранг матрицы A равен 3, то $\dim L(\bar a_1, \bar a_2, \bar a_3) = 3$.

2) Находим размерность подпространства $L(\bar b_1, \bar b_2)$.

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{I\leftrightarrow II} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{II+I\cdot(-2)}$$
$$\longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Итак, $\dim L(\bar b_1, \bar b_2) = 2$.

3) Находим размерность $L(\bar a_1, \bar a_2, \bar a_3, \bar b_1, \bar b_2)$.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[IV+I\cdot 2, V+I]{II+I\cdot(-2), III+I\cdot(-1)}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & 9 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{II \leftrightarrow III} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & 9 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[IV+II\cdot 3, V+II\cdot 2]{III+II\cdot(-3)}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{III \leftrightarrow V} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{V+III\cdot 7}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как ранг матрицы C равен 3, то

$$\dim L(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{b}_1, \bar{b}_2) = 3.$$

Таким образом,

$$\dim(L(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3) \cap L(\bar{b}_1, \bar{b}_2)) = 3 + 2 - 3 = 2.$$

Выясним, принадлежит ли вектор $\bar{x} = (1,4,1)$ подпространству $L(\bar{b}_1, \bar{b}_2)$. Предположим, что $\bar{x} \in L(\bar{b}_1, \bar{b}_2)$. Тогда

$$\alpha_1 \bar{b}_1 + \alpha_2 \bar{b}_2 = \bar{x},$$

$$\alpha_1(-2,1,3) + \alpha_2(-1,0,2) = (1,4,1),$$

откуда

$$\begin{cases} -2\alpha_1 - \alpha_2 = 1, \\ \alpha_1 = 4, \\ 3\alpha_1 + 2\alpha_2 = 1. \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{rr|r} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{I \leftrightarrow II} \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & 4 \\ -2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[III+I\cdot(-3)]{II+I\cdot 2}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 9 \\ 0 & 2 & -11 \end{array}\right) \xrightarrow{III+II\cdot 2} \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 7 \end{array}\right)$$

Так как ранг матрицы системы равен 2, а ранг расширенной матрицы системы — 3, то по теореме Кронекера-Капелли система несовместна. Следовательно, необходимые α_1 и α_2 не существуют. Это означает, что вектор $\bar{x}$ не принадлежит $L(\bar{b}_1, \bar{b}_2)$.

По лемме 3.3 подпространство $L(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3) = \mathbb{R}^3$, поэтому вектор $\bar{x} \in L(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3)$.

Ответ: $\dim(L(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3) \cap L(\bar{b}_1, \bar{b}_2)) = 2$; $\bar{x} \in L(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3)$; $\bar{x} \notin L(\bar{b}_1, \bar{b}_2)$. ⊠

Пример 3.7. Пусть в пространстве $\mathbb{R}^4$ заданы подпространства $A = L(\bar{a}_1, \bar{a}_2)$ и $B = L(\bar{a}_3, \bar{a}_4)$, где $\bar{a}_1 = (1,1,-1,-1)$, $\bar{a}_2 = (3,-1,1,-2)$, $\bar{a}_3 = (2,1,2,-3)$, $\bar{a}_4 = (1,2,3,-3)$. Докажите, что $\mathbb{R}^4 = A \oplus B$. Представьте вектор $\bar{x} = (0,2,0,-1)$ в виде $\bar{x} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2$, где $\bar{x}_1 \in A$, $\bar{x}_2 \in B$.

□ По теореме 3.7

$$A + B = L(\bar{a}_1, \bar{a}_2) + L(\bar{a}_3, \bar{a}_4) = L(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4).$$

Найдем $\dim(A + B)$.

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[IV+I\cdot(-1)]{II+I\cdot(-3),\, III+I\cdot(-2)}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{II \leftrightarrow IV} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & -4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[IV+II\cdot 4]{III+II}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 8 & -3 \\ 0 & 0 & 20 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{IV\cdot 2+III\cdot(-5)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 8 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как $r(F) = 4$, то $\dim(A+B) = 4$. Поскольку $A+B$ — подпространство пространства $\mathbb{R}^4$ размерности 4, то по лемме 3.3 $A + B = \mathbb{R}^4$.

Пусть вектор $\bar{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in A \cap B$. Тогда $\bar{y} \in A$ и $\bar{y} = \alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2$. Также $\bar{y} \in B$ и поэтому $\bar{y} = \alpha_3\bar{a}_3 + \alpha_4\bar{a}_4$. Следовательно,

$$\alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2 = \alpha_3\bar{a}_3 + \alpha_4\bar{a}_4,$$

откуда

$$\alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2 - \alpha_3\bar{a}_3 - \alpha_4\bar{a}_4 = \bar{0}.$$

Но, находя ранг матрицы F, мы показали, что векторы $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$, $\bar{a}_4$ линейно независимы. Поэтому $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$. Следовательно, $\bar{y} = \bar{0}$ и $A \cap B = \{\bar{0}\}$. Это означает, что $\mathbb{R}^4 = A \oplus B$.

Пусть вектор

$$\bar{x} = \beta_1\bar{a}_1 + \beta_2\bar{a}_2 + \beta_3\bar{a}_3 + \beta_4\bar{a}_4,$$

$$\beta_1(1,1,-1,-1) + \beta_2(3,-1,1,-2)+$$

$$+\beta_3(2,1,2,-3) + \beta_4(1,2,3,-3) = (0,2,0,-1),$$

откуда

$$\begin{cases} \beta_1 + 3\beta_2 + 2\beta_3 + \beta_4 = 0, \\ \beta_1 - \beta_2 + \beta_3 + 2\beta_4 = 2, \\ -\beta_1 + \beta_2 + 2\beta_3 + 3\beta_4 = 0, \\ -\beta_1 - 2\beta_2 - 3\beta_3 - 3\beta_4 = -1. \end{cases}$$

Решим систему методом Гаусса

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & -3 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[IV+I]{II+I\cdot(-1),III+I}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[IV\leftrightarrow III]{II\leftrightarrow IV}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -4 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[IV+II\cdot(-4)]{III+II\cdot 4}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & -7 & -2 \\ 0 & 0 & 8 & 12 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{IV\cdot 1/4}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & -7 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{IV\cdot 5+III\cdot 2}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & -7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Так как ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы системы, то по теореме Кронекера-Капелли система совместна.

$$\begin{cases} \beta_1 + 3\beta_2 + 2\beta_3 + \beta_4 = 0, \\ \beta_2 - \beta_3 - 2\beta_4 = -1, \\ -5\beta_3 - 7\beta_4 = -2, \\ \beta_4 = 1. \end{cases}$$

Число уравнений ступенчатой системы равно числу неизвестных, поэтому система имеет единственное решение.

$$\beta_4 = 1,$$
$$-5\beta_3 - 7 = -2, \beta_3 = -1,$$
$$\beta_2 + 1 - 2 = -1, \beta_2 = 0,$$
$$\beta_1 - 2 + 1 = 0, \beta_1 = 1.$$

Таким образом, вектор $\bar{x} = \bar{a}_1 - \bar{a}_3 + \bar{a}_4$. Следовательно, $\bar{x} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2$, где $\bar{x}_1 = \bar{a}_1 \in A$, $\bar{x}_2 = -\bar{a}_3 + \bar{a}_4 \in B$.

Ответ: $\bar{x} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2$, где $\bar{x}_1 = \bar{a}_1 \in A$, $\bar{x}_2 = -\bar{a}_3 + \bar{a}_4 \in B$.

$\boxtimes$

3.3 Индивидуальные задания

1.1–1.5 Является ли подпространством линейного пространства $\mathbb{R}_n[x]$ множество многочленов $f(x) \in \mathbb{R}_n[x]$, удовлетворяющих условию:

1.1 $f(-x) = f(x)$?

1.2 $f(-x) = -f(x)$?

1.3 $f(0) - 2f(1) = 0$?

1.4 $f(1) + f(2) + f(3) = 0$?

1.5 $f(3) = 1$?

1.6–1.10 Является ли подпространством линейного пространства $M_2(\mathbb{C})$:

1.6 множество невырожденных квадратных матриц порядка 2 над полем $\mathbb{C}$?

1.7 множество всех матриц из пространства $M_2(\mathbb{C})$, перестановочных с фиксированной матрицей $A \in M_2(\mathbb{C})$?

1.8 множество вырожденных квадратных матриц порядка 2 над полем $\mathbb{C}$?

1.9 множество всех матриц

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}),$$

удовлетворяющих условию $a + d = 0$?

1.10 множество всех матриц

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}),$$

удовлетворяющих условию $a + b = 1$?

1.11–1.15 Является ли подпространством линейного пространства $\mathbb{R}^n$ множество всех $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ таких, что:

1.11 $\alpha_1 = \alpha_n$?

1.12 $\alpha_1 = \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n$?

1.13 $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$?

1.14 $\alpha_n = \alpha_{n-1} = 1$?

1.15 $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 0$?

2 Найдите базис и размерность линейной оболочки $L(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4)$ системы векторов из линейного пространства $\mathbb{R}^4$.

2.1 $\bar{a}_1 = (1{,}0{,}0,-1)$, $\bar{a}_2 = (2{,}1{,}1{,}0)$,
$\bar{a}_3 = (1{,}1{,}1{,}1)$, $\bar{a}_4 = (-1{,}4{,}3{,}2)$.

2.2 $\bar{a}_1 = (1{,}1{,}1{,}1)$, $\bar{a}_2 = (1{,}1,-1,-1)$,
$\bar{a}_3 = (2{,}2{,}0{,}0)$, $\bar{a}_4 = (3{,}3,-1,-1)$.

2.3 $\bar{a}_1 = (1{,}2{,}1{,}2)$, $\bar{a}_2 = (2{,}1{,}2{,}1)$,
$\bar{a}_3 = (1,-1{,}1,-1)$, $\bar{a}_4 = (1{,}1{,}1{,}1)$.

2.4 $\bar{a}_1 = (-1{,}1{,}0{,}1)$, $\bar{a}_2 = (2{,}0{,}1{,}1)$,
$\bar{a}_3 = (1{,}1,-1{,}1)$, $\bar{a}_4 = (0{,}2,-1{,}2)$.

2.5 $\bar{a}_1 = (0{,}1{,}1{,}2)$, $\bar{a}_2 = (-3{,}1{,}0,-1)$,
$\bar{a}_3 = (-1{,}2{,}1,-1)$, $\bar{a}_4 = (2{,}1{,}1{,}0)$.

2.6 $\bar{a}_1 = (-1{,}1{,}2{,}1)$, $\bar{a}_2 = (-1{,}2{,}1{,}3)$,
$\bar{a}_3 = (0{,}1,-1{,}2)$, $\bar{a}_4 = (2,-3,-3,-4)$.

2.7 $\bar{a}_1 = (1,-1{,}1,-1)$, $\bar{a}_2 = (0,-1{,}2{,}2)$,
$\bar{a}_3 = (1,-2{,}3{,}1)$, $\bar{a}_4 = (0,-1{,}1{,}1)$.

2.8 $\bar{a}_1 = (0{,}1{,}0{,}1)$, $\bar{a}_2 = (1{,}0{,}1{,}0)$,
$\bar{a}_3 = (2{,}2{,}2{,}3)$, $\bar{a}_4 = (-1{,}1{,}1,-1)$.

2.9 $\bar{a}_1 = (0,-2{,}1{,}1)$, $\bar{a}_2 = (1,-1{,}2{,}1)$,
$\bar{a}_3 = (1,-3{,}3{,}2)$, $\bar{a}_4 = (-2{,}0,-3,-1)$.

2.10 $\bar{a}_1 = (4{,}1{,}0,-1)$, $\bar{a}_2 = (-2{,}1{,}2{,}3)$,
$\bar{a}_3 = (-1{,}3{,}0{,}2)$, $\bar{a}_4 = (2{,}2{,}2{,}2)$.

2.11 $\bar{a}_1 = (-1{,}0{,}2{,}3)$, $\bar{a}_2 = (1{,}2{,}0{,}1)$,
$\bar{a}_3 = (4{,}3,-1{,}2)$, $\bar{a}_4 = (0{,}1{,}3{,}2)$.

2.12 $\bar{a}_1 = (2,-1{,}1{,}0)$, $\bar{a}_2 = (2{,}4{,}1,-1)$,
$\bar{a}_3 = (-1{,}1{,}1{,}2)$, $\bar{a}_4 = (3{,}4{,}3{,}1)$.

2.13 $\bar{a}_1 = (2,-1,-1{,}1)$, $\bar{a}_2 = (-1{,}3{,}2{,}0)$,
$\bar{a}_3 = (3{,}1{,}0{,}2)$, $\bar{a}_4 = (-1,-2,-1,-1)$.

2.14 $\bar{a}_1 = (-1{,}1{,}1{,}3)$, $\bar{a}_2 = (2,-1{,}4{,}2)$,
$\bar{a}_3 = (1{,}1,-2{,}1)$, $\bar{a}_4 = (2{,}1{,}3{,}6)$.

2.15 $\bar{a}_1 = (1{,}0{,}2,-1)$, $\bar{a}_2 = (2{,}1,-1{,}3)$,
$\bar{a}_3 = (-1{,}1{,}4{,}2)$, $\bar{a}_4 = (3{,}1,-1{,}0)$.

3 Будет ли $L(z_1, z_2)$ совпадать с действительным линейным пространством $\mathbb{C}$?.

3.1 $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = -2 - 4i$.
3.2 $z_1 = 3 - i$, $z_2 = -6 + i$.
3.3 $z_1 = 2 - i$, $z_2 = -6 - 3i$.
3.4 $z_1 = -1 + i$, $z_2 = 2 - 2i$.
3.5 $z_1 = -3 + 2i$, $z_2 = 3 - i$.
3.6 $z_1 = -2i$, $z_2 = 3i$.
3.7 $z_1 = 4 - i$, $z_2 = -12 + 3i$.
3.8 $z_1 = 2i$, $z_2 = -1 - i$.
3.9 $z_1 = -1 + 2i$, $z_2 = 2 - i$.
3.10 $z_1 = 1 + i$, $z_2 = -2 - 2i$.
3.11 $z_1 = 2 + i$, $z_2 = -4 + 2i$.
3.12 $z_1 = -2 + 4i$, $z_2 = -1 - 2i$.
3.13 $z_1 = -1 + 4i$, $z_2 = 2 - 8i$.
3.14 $z_1 = -1 + 3i$, $z_2 = 3 - 6i$.
3.15 $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = -4 - 6i$.

4.1–4.8 Найдите базис и размерность линейной оболочки $L(a_1, a_2, a_3)$ векторов линейного пространства $\mathbb{R}_2[x]$. Принадлежит ли вектор f линейной оболочке $L(a_1, a_2, a_3)$?

4.1 $a_1 = x^2 + x + 1$, $a_2 = x^2 - x$,
$a_3 = -2x - 1$, $f = x^2 + 2x + 4$.
4.2 $a_1 = 3x^2 - 1$, $a_2 = 2x + 1$,
$a_3 = x^2 + x - 1$, $f = x^2 - 2x + 3$.
4.3 $a_1 = 2x - 1$, $a_2 = x^2 + 2x - 1$,
$a_3 = x^2 + x$, $f = -3x^2 + x - 2$.
4.4 $a_1 = -x^2 + 1$, $a_2 = x^2 - 3x$,
$a_3 = 2x^2 - 3x - 1$, $f = 2x^2 - 3x + 4$.
4.5 $a_1 = x^2 + x - 3$, $a_2 = -3x^2 + 2x$,

$a_3 = 5x - 9, \qquad f = x^2 - 2x - 2.$

4.6 $a_1 = -x^2 + 3x + 2, \quad a_2 = 2x - 5,$
$a_3 = 2x^2 - 5x - 3, \quad f = 3x^2 - 2x + 1.$

4.7 $a_1 = x^2 - x + 4, \quad a_2 = -2x^2 + 3x - 1,$
$a_3 = -x^2 + 2x + 3, \quad f = x^2 + 11.$

4.8 $a_1 = -x^2 - 2x + 3, \quad a_2 = 3x^2 + 4x - 1,$
$a_3 = 2x^2 + 2x + 2, \quad f = x^2 + 5.$

4.9–4.15 Найдите базис, а также размерность линейной оболочки $L(A_1, A_2, A_3)$ векторов линейного пространства $M(2, \mathbb{R})$. Принадлежит ли вектор B линейной оболочке $L(A_1, A_2, A_3)$?

4.9 $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$
$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}.$

4.10 $A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix},$
$A_3 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$

4.11 $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$
$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

4.12 $A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$
$A_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$

4.13 $A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix},$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

4.14 $A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix},$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.15 $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 9 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

5 Найдите размерность пересечения подпространств $L(\bar{a}_1,\bar{a}_2,\bar{a}_3)$, $L(\bar{b}_1,\bar{b}_2)$ векторов линейного пространства $\mathbb{R}^3$.

5.1 $\bar{a}_1 = (1,-1,2)$, $\bar{a}_2 = (3,0,2)$, $\bar{a}_3 = (2,1,0)$,
$\bar{b}_1 = (1,1,3)$, $\bar{b}_2 = (0,1,2)$.

5.2 $\bar{a}_1 = (0,1,3)$, $\bar{a}_2 = (-1,2,0)$, $\bar{a}_3 = (-1,3,3)$,
$\bar{b}_1 = (-1,2,3)$, $\bar{b}_2 = (2,-4,-6)$.

5.3 $\bar{a}_1 = (-2,3,-1)$, $\bar{a}_2 = (1,1,-2)$, $\bar{a}_3 = (-3,2,1)$,
$\bar{b}_1 = (3,2,3)$, $\bar{b}_2 = (-1,0,1)$.

5.4 $\bar{a}_1 = (0,-1,1)$, $\bar{a}_2 = (1,2,-2)$, $\bar{a}_3 = (1,1,-1)$,
$\bar{b}_1 = (-2,1,2)$, $\bar{b}_2 = (4,-2,-4)$.

5.5 $\bar{a}_1 = (-2,1,0)$, $\bar{a}_2 = (0,1,-1)$, $\bar{a}_3 = (1,-2,1)$,
$\bar{b}_1 = (1,1,-1)$, $\bar{b}_2 = (0,-1,1)$.

5.6 $\bar{a}_1 = (1,1,-1)$, $\bar{a}_2 = (-2,0,3)$, $\bar{a}_3 = (-1,1,2)$,
$\bar{b}_1 = (0,1,3)$, $\bar{b}_2 = (2,1,0)$.

5.7 $\bar{a}_1 = (2,1,-1)$, $\bar{a}_2 = (-1,2,0)$, $\bar{a}_3 = (2,3,-1)$,
$\bar{b}_1 = (-1,3,1)$, $\bar{b}_2 = (4,0,2)$.

5.8 $\bar{a}_1 = (-1,0,1)$, $\bar{a}_2 = (2,-1,3)$, $\bar{a}_3 = (1,-1,4)$,
$\bar{b}_1 = (-1,2,4)$, $\bar{b}_2 = (2,-4,-8)$.

5.9 $\bar{a}_1 = (0,1,-1)$, $\bar{a}_2 = (-1,-1,2)$, $\bar{a}_3 = (-1,0,1)$,

$\bar{b}_1 = (5,-1,2)$, $\bar{b}_2 = (-1,3,1)$.

5.10 $\bar{a}_1 = (2,-3,1)$, $\bar{a}_2 = (-3,2,0)$, $\bar{a}_3 = (1,-1,1)$,
$\bar{b}_1 = (1,-1,3)$, $\bar{b}_2 = (-2,2,-6)$.

5.11 $\bar{a}_1 = (1,-1,2)$, $\bar{a}_2 = (1,3,0)$, $\bar{a}_3 = (1,2,2)$,
$\bar{b}_1 = (-3,2,1)$, $\bar{b}_2 = (4,3,-1)$.

5.12 $\bar{a}_1 = (-2,1,2)$, $\bar{a}_2 = (0,-2,-1)$, $\bar{a}_3 = (-2,-1,1)$,
$\bar{b}_1 = (3,2,0)$, $\bar{b}_2 = (-3,-2,0)$.

5.13 $\bar{a}_1 = (-1,1,0)$, $\bar{a}_2 = (0,-1,1)$, $\bar{a}_3 = (-1,2,-1)$,
$\bar{b}_1 = (1,-2,3)$, $\bar{b}_2 = (2,1,1)$.

5.14 $\bar{a}_1 = (2,-1,3)$, $\bar{a}_2 = (-1,0,2)$, $\bar{a}_3 = (2,-1,1)$,
$\bar{b}_1 = (-1,2,1)$, $\bar{b}_2 = (2,1,0)$.

5.15 $\bar{a}_1 = (1,1,-1)$, $\bar{a}_2 = (2,-3,0)$, $\bar{a}_3 = (1,-4,1)$,
$\bar{b}_1 = (-2,1,3)$, $\bar{b}_2 = (0,-1,1)$.

6 В линейном пространстве $\mathbb{R}^4$ заданы подпространства $A = L(\bar{a}_1, \bar{a}_2)$, $B = L(\bar{a}_3, \bar{a}_4)$. Докажите, что $\mathbb{R}^4 = A \oplus B$. Представьте вектор $\bar{x}$ в виде $\bar{x} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2$, где $\bar{x}_1 \in A$, $\bar{x}_2 \in B$.

6.1 $\bar{a}_1 = (-1,1,2,-1)$, $\bar{a}_2 = (1,0,-2,2)$,
$\bar{a}_3 = (4,-6,-9,1)$, $\bar{a}_4 = (5,-4,-7,10)$,
$\bar{x} = (0,4,4,9)$.

6.2 $\bar{a}_1 = (-2,4,2,-2)$, $\bar{a}_2 = (1,-1,-1,2)$,
$\bar{a}_3 = (3,-1,-2,9)$, $\bar{a}_4 = (4,-9,0,6)$,
$\bar{x} = (-1,12,-1,8)$.

6.3 $\bar{a}_1 = (1,-2,3,1)$, $\bar{a}_2 = (2,-5,6,1)$,
$\bar{a}_3 = (-1,5,-4,1)$, $\bar{a}_4 = (3,-4,13,10)$,
$\bar{x} = (1,3,1,4)$.

6.4 $\bar{a}_1 = (1,-2,3,1)$, $\bar{a}_2 = (1,0,3,3)$,
$\bar{a}_3 = (-3,7,-8,-1)$, $\bar{a}_4 = (-1,5,-4,2)$,
$\bar{x} = (-1,-4,-1,-6)$.

6.5 $\bar{a}_1 = (2,-2,4,2)$, $\bar{a}_2 = (1,0,2,2)$,
$\bar{a}_3 = (0,3,1,4)$, $\bar{a}_4 = (-1,0,-4,-3)$,
$\bar{x} = (4,-1,15,11)$.

6.6 $\bar{a}_1 = (1,-1,2,1)$, $\bar{a}_2 = (-1,0,-2,-2)$,
$\bar{a}_3 = (-1,3,-3,0)$, $\bar{a}_4 = (-2,5,0,6)$,
$\bar{x} = (-2,-3,3,1)$.

6.7 $\bar{a}_1 = (2,-4,2,2)$, $\bar{a}_2 = (-1,1,-1,-2)$,
$\bar{a}_3 = (1,-3,0,-1)$, $\bar{a}_4 = (1,1,5,9)$,
$\bar{x} = (5,-13,-1,-5)$.

6.8 $\bar{a}_1 = (1,2,-3,1)$, $\bar{a}_2 = (-1,0,3,1)$,
$\bar{a}_3 = (2,5,-5,4)$, $\bar{a}_4 = (0,3,-2,2)$,
$\bar{x} = (0,8,-7,4)$.

6.9 $\bar{a}_1 = (-1,-2,3,-1)$, $\bar{a}_2 = (1,4,-3,3)$,
$\bar{a}_3 = (0,1,1,2)$, $\bar{a}_4 = (1,-1,-1,1)$,
$\bar{x} = (-5,-1,11,-3)$.

6.10 $\bar{a}_1 = (1,3,-2,1)$, $\bar{a}_2 = (-2,-5,4,-1)$,
$\bar{a}_3 = (1,5,-3,2)$, $\bar{a}_4 = (1,6,2,7)$,
$\bar{x} = (-2,-10,1,-8)$.

6.11 $\bar{a}_1 = (1,-3,2,1)$, $\bar{a}_2 = (1,-4,2,0)$,
$\bar{a}_3 = (2,-3,3,4)$, $\bar{a}_4 = (-1,8,-4,3)$,
$\bar{x} = (-2,15,-7,5)$.

6.12 $\bar{a}_1 = (1,2,-3,1)$, $\bar{a}_2 = (-1,-1,3,0)$,
$\bar{a}_3 = (1,-1,-2,-1)$, $\bar{a}_4 = (0,5,-1,5)$,
$\bar{x} = (5,-3,-12,-6)$.

6.13 $\bar{a}_1 = (-1,-2,3,-1)$, $\bar{a}_2 = (-1,-1,3,0)$,
$\bar{a}_3 = (0,3,-1,2)$, $\bar{a}_4 = (2,3,-2,6)$,
$\bar{x} = (2,-2,3,7)$.

6.14 $\bar{a}_1 = (-2,-4,0,-2)$, $\bar{a}_2 = (1,1,-1,0)$,
$\bar{a}_3 = (1,5,4,5)$, $\bar{a}_4 = (1,4,0,2)$,
$\bar{x} = (4,4,1,3)$.

6.15 $\bar{a}_1 = (1{,}2, -3{,}1)$, $\bar{a}_2 = (1{,}3, -3{,}2)$,
$\bar{a}_3 = (-1, -3{,}2, -3)$, $\bar{a}_4 = (2{,}7, -4{,}6)$,
$\bar{x} = (2{,}3, -7{,}1)$.

4 ЛИНЕЙНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВ

4.1 Элементы теории

4.1.1 Классификация и примеры линейных отображений

Пусть V и W — линейные пространства над полем P. Отображение $f : V \to W$ называется *линейным отображением пространства V в пространство W*, если выполняются условия:

$$f(\bar{x} + \bar{y}) = f(\bar{x}) + f(\bar{y}) \text{ для всех } \bar{x},\bar{y} \in V, \tag{4.1}$$

$$f(\alpha\bar{x}) = \alpha f(\bar{x}) \text{ для всех } \bar{x} \in V, \alpha \in P. \tag{4.2}$$

Условие (4.1) называется *условием аддитивности отображения f*. Условие (4.2) называется *условием однородности отображения f*.

Взаимно однозначное линейное отображение линейного пространства V в пространство W называется *изоморфизмом линейных пространств V и W* .

Линейное отображение пространства V в себя называется *линейным оператором пространства V*. Взаимно-однозначный линейный оператор пространства V называется *линейным преобразованием* или *автоморфизмом линейного пространства V*.

Пример 4.1. Пусть линейное пространство V над полем P является прямой суммой подпространств U_1 и U_2. Тогда по теореме 3.5 каждый вектор $\bar{x} \in V$ единственным образом представим в виде $\bar{x} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2$, где $\bar{x}_1 \in U_1$, $\bar{x}_2 \in U_2$. Отображение $p : \bar{x} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 \mapsto \bar{x}_1$ является линейным оператором пространства V и называется *оператором проектирования пространства V на U_1 параллельно U_2*. Отображение $s : \bar{x} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 \mapsto \bar{x}_1 - \bar{x}_2$ также является линейным оператором пространства V и называется *симметрией относительно подпространства U_1 в направлении U_2*.

4.1.2 Свойства линейных отображений

Лемма 4.1 (Критерий линейного отображения). *Пусть V и W — линейные пространства над полем P. Отображение $f : V \to W$ является линейным отображением пространства V в пространство W тогда и только тогда, когда $f(\alpha\bar{x}+\beta\bar{y}) = \alpha f(\bar{x})+\beta f(\bar{y})$ для любых $\bar{x}$, $\bar{y} \in V$ и любых α, $\beta \in P$.*

Лемма 4.2. *Пусть V и W — линейные пространства над полем P, $f : V \to W$ — линейное отображение. Тогда:*

1) *если $\bar{0}$ и $\bar{0}'$ — нулевые элементы пространств V и W, соответственно, то $f(\bar{0}) = \bar{0}'$;*

2) *$f(-\bar{x}) = -f(\bar{x})$ для любого $\bar{x} \in V$;*

3) *при любых $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, $\ldots$,$\bar{x}_n \in V$ и при любых α_1, α_2, $\ldots$, $\alpha_n \in P$ имеет место равенство*

$$f(\alpha_1\bar{x}_1 + \ldots + \alpha_n\bar{x}_n) = \alpha_1 f(\bar{x}_1) + \ldots + \alpha_n f(\bar{x}_n);$$

4) *если система векторов $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, $\ldots$, $\bar{x}_n \in V$ линейно зависима, то линейно зависима и система векторов $f(\bar{x}_1)$, $f(\bar{x}_2)$, $\ldots$, $f(\bar{x}_n)$.*

4.1.3 Построение линейного отображения

Теорема 4.3. *Пусть V и W — линейные пространства над полем P, $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, …, $\bar{e}_n$ — базис пространства V, $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, …, $\bar{a}_n$ — произвольная система векторов пространства W. Тогда существует единственное линейное отображение $f : V \to W$, при котором $f(\bar{e}_i) = \bar{a}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Эта теорема показывает как можно строить линейные отображения пространства V в пространство W. Для построения достаточно задать образы $f(\bar{e}_1)$, $f(\bar{e}_2)$, …, $f(\bar{e}_n)$ векторов некоторого базиса $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, …, $\bar{e}_n$ пространства V, причем этими образами могут быть произвольные векторы пространства W.

4.1.4 Матрица линейного оператора

Пусть f — линейный оператор n-мерного линейного пространства V над полем P, $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, …, $\bar{e}_n$ — базис этого пространства. Так как $f(\bar{e}_1)$, $f(\bar{e}_2)$, …, $f(\bar{e}_n) \in V$, то их можно разложить по векторам базиса $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, …, $\bar{e}_n$:

$$\begin{cases} f(\bar{e}_1) = \lambda_{11}\bar{e}_1 + \lambda_{12}\bar{e}_2 + \ldots + \lambda_{1n}\bar{e}_n, \\ f(\bar{e}_2) = \lambda_{21}\bar{e}_1 + \lambda_{22}\bar{e}_2 + \ldots + \lambda_{2n}\bar{e}_n, \\ \quad \ldots \\ f(\bar{e}_n) = \lambda_{n1}\bar{e}_1 + \lambda_{n2}\bar{e}_2 + \ldots + \lambda_{nn}\bar{e}_n. \end{cases} \tag{4.3}$$

Матрица $A = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \ldots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \ldots & \lambda_{2n} \\ \ldots & & & \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \ldots & \lambda_{nn} \end{pmatrix}$ называется *матрицей линейного оператора f в базисе $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$.*

Теорема 4.4. *Пусть f — линейный оператор n-мерного линейного пространства V над полем P, $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, ..., $\bar{e}_n$ — базис пространства V, $\bar{x} \in V$. Тогда координатная строка вектора $f(\bar{x})$ в базисе $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, ..., $\bar{e}_n$ вычисляется по формуле $(f(\bar{x})) = (\bar{x})A$, где $(\bar{x})$ — координатная строка вектора $\bar{x}$, A — матрица линейного оператора в базисе $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, ..., $\bar{e}_n$.*

Матрицы одного и того же линейного оператора в разных базисах линейного пространства V различны, но связаны между собой.

Теорема 4.5. *Пусть f — линейный оператор n-мерного линейного пространства V над полем P, $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, ..., $\bar{e}_n$ и $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, ..., $\bar{a}_n$ — базисы пространства V, T — матрица перехода от базиса $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, ..., $\bar{e}_n$ к базису $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, ..., $\bar{a}_n$. Если A — матрица оператора f в базисе $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, ..., $\bar{e}_n$, B – матрица оператора f в базисе $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, ..., $\bar{a}_n$, то $B = TAT^{-1}$.*

4.1.5 Ядро и образ линейного оператора

Пусть V — линейное пространство над полем P, f — линейный оператор пространства V. Множество

$$Ker\ f = \{\bar{x} \in V | f(\bar{x}) = \bar{0}\}$$

называется *ядром линейного оператора* f, а множество

$$Im\ f = \{f(\bar{x}) | \bar{x} \in V\}$$

называется *образом линейного оператора* f.

Лемма 4.6. *Ядро и образ линейного оператора пространства* V *являются линейными подпространствами пространства* V.

Рангом линейного оператора f конечномерного линейного пространства V называется размерность подпространства $\mathrm{Im} f$, т.е. $\mathrm{rank} f = \dim \mathrm{Im} f$.

Дефектом линейного оператора f конечномерного пространства V называется размерность пространства $\mathrm{Ker} f$, т. е. $\mathrm{def} f = \dim \mathrm{Ker} f$.

Теорема 4.7. *Пусть* V *— конечномерное линейное пространство над полем* P, f *— линейный оператор пространства* V. *Тогда* $\dim V = \mathrm{rank}\, f + \mathrm{def}\, f$.

На практике ядро и образ линейного оператора находится, как правило, с помощью следующей теоремы.

Теорема 4.8. *Пусть* f *— линейный оператор пространства* V_n, A *— матрица оператора* f *в базисе* $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\ldots$, $\bar{e}_n$. *Тогда:*

1) $\mathrm{Im} f = L(f(\bar{e}_1), f(\bar{e}_2), \ldots, f(\bar{e}_n))$;

2) $\bar{x} \in \mathrm{Ker} f$ *тогда и только тогда, когда* $(\bar{x})A = (\bar{0})$.

4.1.6 Линейное пространство $\mathbf{Hom}_P V$

Множество всех линейный операторов линейного пространства V над полем P будем обозначать $\mathrm{Hom}_P V$. *Суммой операторов* f *и* g называется отображение $f+g$ пространства V в себя, определяемое для каждого $\bar{x} \in V$ формулой $(f+g)(\bar{x}) = f(\bar{x}) + g(\bar{x})$. *Произведением скаляра* $\lambda \in P$ *и линейного оператора* $f \in \mathrm{Hom}_P V$ называется отображение λf пространства V в себя, определяемое для каждого $\bar{x} \in V$ формулой $(\lambda f)(\bar{x}) = \lambda f(\bar{x})$.

Теорема 4.9. *Множество* $\mathrm{Hom}_P V$ *с введенными выше операциями сложения операторов и умножения скаляра на линейный оператор является линейным пространством над полем* P. *Причем, если* $\dim V = n$, *то* $\mathrm{Hom}_P V \simeq M_n(P)$.

Теорема 4.10. *Пусть* $f, g \in \mathrm{Hom}_P V$, A, B *— матрицы операторов* f *и* g *в базисе* $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$ *пространства* V. *Тогда матрицами операторов* $f + g$ *и* λf, *где* $\lambda \in P$, *в том же базисе являются матрицы* $A+B$ *и* λA, *соответственно.*

4.1.7 Группа линейных преобразований $\mathrm{Aut}_P V$

Произведением операторов $f, g \in \mathrm{Hom}_P V$ называется отображение $fg : V \to V$, определяемое равенством

$$(fg)(\bar{x}) = f(g(\bar{x}))$$

для каждого $\bar{x} \in V$. Произведение fg также является линейным оператором пространства V.

Оператор $f \in \mathrm{Hom}_P V$ называется *обратимым*, если существует линейный оператор $g \in \mathrm{Hom}_P V$ такой, что $fg = gf = \varepsilon$, где ε — тождественный оператор пространства V. Оператор g называется *обратным* для оператора f и обозначается f^{-1}.

Теорема 4.11. *Пусть* $f, g \in \mathrm{Hom}_P V$, A, B *— матрицы операторов* f *и* g *в базисе* $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$, *соответственно. Тогда* BA *— матрица линейного оператора* fg *в базисе* $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$. *Если оператор* f *обратим, то* A^{-1} *— матрица линейного оператора* f^{-1} *в том же базисе.*

Теорема 4.12 (**Критерий обратимости линейного**

оператора). *Линейный оператор $f \in \mathrm{Hom}_P V$ обратим тогда и только тогда, когда f — линейное преобразование пространства V.*

Множество всех линейных преобразований линейного пространства V над полем P будем обозначать через $\mathrm{Aut}_P V$ или $GL(V)$.

Теорема 4.13. *Множество $\mathrm{Aut}_P V$ является группой относительно операции умножения линейных преобразований пространства V.*

4.2 Примеры решения задач

Пример 4.2. В действительном линейном пространстве с базисом $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ отображение φ переводит любой вектор $\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2$ в вектор $\varphi(\bar{x}) = (3x_1 - 2x_2)\bar{e}_1 + (2x_1 + x_2)\bar{e}_2$. Докажите, что φ — линейный оператор, и найдите его матрицу в базисе $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$.

□ Пусть $\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2$ и $\bar{y} = y_1\bar{e}_1 + y_2\bar{e}_2$ — произвольные векторы данного пространства. Тогда

$$\varphi(\bar{x} + \bar{y}) = \varphi((x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2) + (y_1\bar{e}_1 + y_2\bar{e}_2)) =$$
$$= \varphi((x_1 + y_1)\bar{e}_1 + (x_2 + y_2)\bar{e}_2) = (3(x_1 + y_1) - 2(x_2 + y_2))\bar{e}_1 +$$
$$+ (2(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2))\bar{e}_2 = (3x_1 - 2x_2)\bar{e}_1 + (3y_1 - 2y_2)\bar{e}_1 +$$
$$+ (2x_1 + x_2)\bar{e}_2 + (2y_1 + y_2)\bar{e}_2 = ((3x_1 - 2x_2)\bar{e}_1 + (2x_1 + x_2)\bar{e}_2) +$$
$$+ ((3y_1 - 2y_2)\bar{e}_1 + (2y_1 + y_2)\bar{e}_2) = \varphi(x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2) +$$
$$+ \varphi(y_1\bar{e}_1 + y_2\bar{e}_2) = \varphi(\bar{x}) + \varphi(\bar{y}),$$

т. е. выполняется условие аддитивности.

Пусть α — произвольный элемент поля $\mathbb{R}$. Тогда

$$\varphi(\alpha\bar{x}) = \varphi(\alpha(x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2)) = \varphi((\alpha x_1)\bar{e}_1 + (\alpha x_2)\bar{e}_2) =$$
$$= (3\alpha x_1 - 2\alpha x_2)\bar{e}_1 + (2\alpha x_1 + \alpha x_2)\bar{e}_2 =$$

$$= \alpha(3x_1 - 2x_2)\bar{e}_1 + \alpha(2x_1 + x_2)\bar{e}_2 =$$
$$= \alpha((3x_1 - 2x_2)\bar{e}_1 + (2x_1 + x_2)\bar{e}_2) =$$
$$= \alpha\varphi(x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2) = \alpha\varphi(\bar{x}),$$

т. е. выполняется условие однородности. Значит, φ — линейное отображение. Поскольку φ отображает данное пространство в себя, то φ — линейный оператор.

Найдем разложение по векторам базиса $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ векторов $\varphi(\bar{e}_1)$ и $\varphi(\bar{e}_2)$.

$$\varphi(\bar{e}_1) = \varphi(1\bar{e}_1 + 0\bar{e}_2) =$$
$$= (3 \cdot 1 - 2 \cdot 0)\bar{e}_1 + (2 \cdot 1 + 1 \cdot 0)\bar{e}_2 = 3\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2.$$
$$\varphi(\bar{e}_2) = \varphi(0 \cdot \bar{e}_1 + 1 \cdot \bar{e}_2) =$$
$$= (3 \cdot 0 - 2 \cdot 1)\bar{e}_1 + (2 \cdot 0 + 1 \cdot 1)\bar{e}_2 = -2\bar{e}_1 + \bar{e}_2.$$

Следовательно, матрица линейного оператора φ в базисе $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ имеет вид $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. ⊠

Пример 4.3. Покажите, что отображение φ, состоящее в умножение всех матриц линейного пространства $M_2(\mathbb{R})$ слева на матрицу A, является линейным оператором пространства $M_2(\mathbb{R})$. Найдите матрицу этого линейного оператора в базисе E_1, E_2, E_3, E_4.

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

□ Пусть B и C — произвольные матрицы из пространства $M_2(\mathbb{R})$. Тогда

$$\varphi(B + C) = A(B + C) = AB + AC = \varphi(B) + \varphi(C),$$

т. е. выполняется условие аддитивности.

Пусть α — произвольный элемент поля $\mathbb{R}$. Тогда

$$\varphi(\alpha B) = A(\alpha B) = \alpha(AB) = \alpha\varphi(B),$$

т. е. выполняется условие однородности.

Таким образом, φ — линейное отображение. Поскольку φ отображает пространство $M_2(\mathbb{R})$ в себя, то φ — линейный оператор.

Находим

$$\varphi(E_1) = AE_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} =$$
$$= 2E_1 + 0E_2 + 3E_3 + 0E_4;$$
$$\varphi(E_2) = AE_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} =$$
$$= 0E_1 + 2E_2 + 0E_3 + 3E_4;$$
$$\varphi(E_3) = AE_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} =$$
$$= 1E_1 + 0E_2 + (-1)E_3 + 0E_4;$$
$$\varphi(E_4) = AE_4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} =$$
$$= 0E_1 + 1E_2 + 0E_3 + (-1)E_4.$$

Следовательно, матрица линейного оператора φ в базисе E_1, E_2, E_3, E_4 имеет вид

Ответ: $K = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. ⊠

Пример 4.4. В линейном пространстве $\mathbb{R}_3[x]$ задан линейный оператор $\varphi : f(x) \mapsto f(x+1) - f(x-1)$ для любого многочлена $f(x) \in \mathbb{R}_3[x]$. Найдите матрицу этого оператора в базисе 1, x, x^2, x^3. Вычислите $\operatorname{Ker} \varphi$.

$\square$ Найдем разложения $\varphi(1)$, $\varphi(x)$, $\varphi(x^2)$ и $\varphi(x^3)$ по векторам базиса.

$$\varphi(1) = 1 - 1 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3,$$

$$\varphi(x) = (x+1) - (x-1) = 2 = 2 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3,$$

$$\varphi(x^2) = (x+1)^2 - (x-1)^2 = 4x = 0 \cdot 1 + 4 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3,$$

$$\varphi(x^3) = (x+1)^3 - (x-1)^3 = 6x^2 + 2 = 2 \cdot 1 + 0 \cdot x + 6 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3.$$

Таким образом, матрица линейного оператора φ в базисе 1, x, x^2, x^3 имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем ядро линейного оператора φ. Пусть

$$f(x) = \alpha_1 1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3 \in \operatorname{Ker} \varphi.$$

Тогда по теореме 4.8

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

откуда

$$\begin{cases} 2\alpha_2 + 2\alpha_4 = 0, \\ 4\alpha_3 = 0, \\ 6\alpha_4 = 0. \end{cases}$$

Решая систему, находим

$$\alpha_1 \in \mathbb{R}, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0, \alpha_4 = 0.$$

Таким образом, $\operatorname{Ker} \varphi = \{f(x) = \alpha | \alpha \in \mathbb{R}\}$.

$$\text{Ответ: } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}, \ \operatorname{Ker} \varphi = \{f(x) = \alpha | \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

$\boxtimes$

Пример 4.5. Найдите матрицу линейного оператора φ в базисе $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ действительного линейного пространства V, если оператор φ векторы $\bar{x}_1 = 2\bar{e}_1 - \bar{e}_2 + \bar{e}_3$, $\bar{x}_2 = \bar{e}_1 - \bar{e}_2 + 2\bar{e}_3$, $\bar{x}_3 = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 - \bar{e}_3$ переводит в векторы $\bar{y}_1 = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 + \bar{e}_3$, $\bar{y}_2 = 2\bar{e}_1 - \bar{e}_2 + 2\bar{e}_3$, $\bar{y}_3 = \bar{e}_1 - \bar{e}_3$, соответственно. Найдите образ вектора $\bar{z} = \bar{e}_1 - 2\bar{e}_2 + \bar{e}_3$ под действием оператора φ.

$\square$ По условию

$$\begin{cases} \varphi(\bar{x}_1) = \bar{y}_1, \\ \varphi(\bar{x}_2) = \bar{y}_2, \\ \varphi(\bar{x}_3) = \bar{y}_3. \end{cases}$$

Так как φ — линейный оператор пространства V, то, используя условия аддитивности и однородности, получим

$$\begin{cases} 2\varphi(\bar{e}_1) - \varphi(\bar{e}_2) + \varphi(\bar{e}_3) = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 + \bar{e}_3, \\ \varphi(\bar{e}_1) - \varphi(\bar{e}_2) + 2\varphi(\bar{e}_3) = 2\bar{e}_1 - \bar{e}_2 + 2\bar{e}_3, \\ \varphi(\bar{e}_1) + 2\varphi(\bar{e}_2) - \varphi(\bar{e}_3) = \bar{e}_1 - \bar{e}_3. \end{cases}$$

Решаем эту систему относительно $\varphi(\bar{e}_1)$, $\varphi(\bar{e}_2)$, $\varphi(\bar{e}_3)$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 1 & \bar{e}_1 & +2\bar{e}_2 & +\bar{e}_3 \\ 1 & -1 & 2 & 2\bar{e}_1 & -\bar{e}_2 & +2\bar{e}_3 \\ 1 & 2 & -1 & \bar{e}_1 & & -\bar{e}_3 \end{array}\right) \xrightarrow{I \leftrightarrow II}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 2\bar{e}_1 & -\bar{e}_2 & +2\bar{e}_3 \\ 2 & -1 & 1 & \bar{e}_1 & +2\bar{e}_2 & +\bar{e}_3 \\ 1 & 2 & -1 & \bar{e}_1 & & -\bar{e}_3 \end{array}\right) \xrightarrow[III+I\cdot(-1)]{II+I\cdot(-2)}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 2\bar{e}_1 & -\bar{e}_2 & +2\bar{e}_3 \\ 0 & 1 & -3 & -3\bar{e}_1 & +4\bar{e}_2 & -3\bar{e}_3 \\ 0 & 3 & -3 & -\bar{e}_1 & +\bar{e}_2 & -3\bar{e}_3 \end{array}\right) \xrightarrow{III+II\cdot(-3)}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 2\bar{e}_1 & -\bar{e}_2 & +2\bar{e}_3 \\ 0 & 1 & -3 & -3\bar{e}_1 & +4\bar{e}_2 & -3\bar{e}_3 \\ 0 & 0 & 6 & 8\bar{e}_1 & -11\bar{e}_2 & +6\bar{e}_3 \end{array}\right).$$

Запишем и решим ступенчатую систему

$$\begin{cases} \varphi(\bar{e}_1) - \varphi(\bar{e}_2) + 2\varphi(\bar{e}_3) = 2\bar{e}_1 - \bar{e}_2 + 2\bar{e}_3, \\ \qquad\qquad \varphi(\bar{e}_2) - 3\varphi(\bar{e}_3) = -3\bar{e}_1 + 4\bar{e}_2 - 3\bar{e}_3, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 6\varphi(\bar{e}_3) = 8\bar{e}_1 - 11\bar{e}_2 + 6\bar{e}_3. \end{cases}$$

$\varphi(\bar{e}_3) = \dfrac{4}{3}\bar{e}_1 - \dfrac{11}{6}\bar{e}_2 + \bar{e}_3, \varphi(\bar{e}_2) = \bar{e}_1 - \dfrac{3}{2}\bar{e}_2, \varphi(\bar{e}_1) = \dfrac{1}{3}\bar{e}_1 + \dfrac{7}{6}\bar{e}_2.$

Таким образом, матрица линейного оператора φ в базисе $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{7}{6} & 0 \\ 1 & -\frac{3}{2} & 0 \\ \frac{4}{3} & -\frac{11}{6} & 1 \end{pmatrix}.$$

Координатную строку вектора $\varphi(\bar{z})$ находим по формуле

$$(\varphi(\bar{z})) = (\bar{z})A.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{7}{6} & 0 \\ 1 & -\frac{3}{2} & 0 \\ \frac{4}{3} & -\frac{11}{6} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{7}{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $\varphi(\bar{z}) = -\frac{1}{3}\bar{e}_1 + \frac{7}{3}\bar{e}_2 + \bar{e}_3$.

Ответ: $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{7}{6} & 0 \\ 1 & -\frac{3}{2} & 0 \\ \frac{4}{3} & -\frac{11}{6} & 1 \end{pmatrix}$, $\varphi(\bar{z}) = -\frac{1}{3}\bar{e}_1 + \frac{7}{3}\bar{e}_2 + \bar{e}_3$. ⊠

Пример 4.6. В базисе $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ линейного пространства V

линейный оператор φ имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вычислите матрицу оператора φ в базисе $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, если $\bar{a}_1 = 7\bar{e}_1 - 4\bar{e}_2$, $\bar{a}_2 = 2\bar{e}_1 - \bar{e}_2$.

□ Матрицу B линейного оператора φ в базисе $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$ найдем по формуле $B = TAT^{-1}$, где T — матрица перехода от базиса $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ к базису $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$. Так как

$$T = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$

то остается найти T^{-1}.

$$|T| = \begin{vmatrix} 7 & -4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{11} = -1, A_{12} = -2, A_{21} = 4, A_{22} = 7.$$

$$T^{-1} = \frac{1}{|T|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$B = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 & 68 \\ -5 & 19 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} -18 & 68 \\ -5 & 19 \end{pmatrix}$. ⊠

Пример 4.7. В действительном линейном пространстве V линейный оператор φ задан матрицей C в некотором базисе. Найдите базисы ядра и образа линейного оператора φ. Укажите ранг и дефект оператора φ.

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

$\square$ Пусть $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ — базис линейного пространства V, в котором задана матрица C. Тогда

$$\begin{aligned} \varphi(\bar{e}_1) &= -\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 + \bar{e}_3, \\ \varphi(\bar{e}_2) &= -2\bar{e}_1 + 4\bar{e}_2 + 2\bar{e}_3, \\ \varphi(\bar{e}_3) &= \bar{e}_1 - 2\bar{e}_2 - \bar{e}_3. \end{aligned}$$

По теореме 4.8 $\operatorname{Im}\varphi = L(\varphi(\bar{e}_1), \varphi(\bar{e}_2), \varphi(\bar{e}_3))$. Найдем базис и размерность $\operatorname{Im}\varphi$.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[III+I\cdot 1]{II+I\cdot(-2)} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, вектор $\varphi(\bar{e}_1) = -\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 + \bar{e}_3$ — базис пространства $\operatorname{Im}\varphi$. Ранг оператора φ равен

$$\operatorname{rank}\varphi = \dim \ \operatorname{Im}\varphi = 1.$$

Тогда по теореме 4.7 найдем дефект оператора φ:

$$\operatorname{def}\varphi = \dim V - \operatorname{rank}\varphi = 3 - 1 = 2.$$

Пусть вектор $\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3 \in \operatorname{Ker}\varphi$. Тогда по теореме 4.8

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Решаем систему методом Гаусса.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[III+I\cdot 1]{II+I\cdot 2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

и $x_1 = -2x_2 + x_3$, x_2 и x_3 — любые действительные числа.

Таким образом,

$$\operatorname{Ker} \varphi = \{\bar{x} = (-2x_2 + x_3)\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3 | x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Для нахождения базиса $\operatorname{Ker} \varphi$ выполним следующие преобразования

$$\bar{x} = (-2x_2 + x_3)\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3 = (-2x_2\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2) +$$
$$+ (x_3\bar{e}_1 + x_3\bar{e}_3) = x_2(-2\bar{e}_1 + \bar{e}_2) + x_3(\bar{e}_1 + \bar{e}_3).$$

Векторы $\bar{a}_1 = -2\bar{e}_1 + \bar{e}_2$, $\bar{a}_2 = \bar{e}_1 + \bar{e}_3$ образуют базис пространства $\operatorname{Ker} \varphi$.

Ответ: $\varphi(\bar{e}_1) = -\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 + \bar{e}_3$ — базис $\operatorname{Im} \varphi$; $\bar{a}_1 = -2\bar{e}_1 + \bar{e}_2$, $\bar{a}_2 = \bar{e}_1 + \bar{e}_3$ — базис $\operatorname{Ker} \varphi$; $\operatorname{rank} \varphi = 1$; $\operatorname{def} \varphi = 2$.

⊠

Пример 4.8. В некотором базисе пространства $\mathbb{R}^2$ линейные операторы f и g имеют матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

соответственно. Найдите матрицы операторов $3f + 2g$, fg. Обратим ли оператор f?

□ Пусть C — искомая матрица линейного оператора $3f + 2g$. По теореме 4.10

$$C = 3A + 2B = 3\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ -10 & -2 \end{pmatrix}.$$

Пусть K — искомая матрица линейного оператора fg. По теореме 4.11

$$K = BA = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}.$$

Если оператор f обратим, то существует матрица A^{-1}. Так как $|A| = 0$, то A^{-1} не существует. Следовательно, оператор f не имеет обратного.

Ответ: $C = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ -10 & -2 \end{pmatrix}$; $K = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}$; нет. $\boxtimes$

4.3 Индивидуальные задания

1 В действительном линейном пространстве V с базисом $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ отображение φ переводит произвольный вектор $\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2$ в вектор $\varphi(\bar{x}) = (ax_1 - bx_2)\bar{e}_1 + (x_1 - ax_2)\bar{e}_2$. Докажите, что φ — линейный оператор пространства V. Найдите его матрицу в базисе $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$.

1.1	$a = -1,\ b = 2.$	1.2	$a = 1,\ b = -2.$
1.3	$a = 2,\ b = 1.$	1.4	$a = 2,\ b = 3.$
1.5	$a = -2,\ b = 3.$	1.6	$a = 3,\ b = -2.$
1.7	$a = -1,\ b = 3.$	1.8	$a = 3,\ b = -1.$
1.9	$a = -3,\ b = -1.$	1.10	$a = 2,\ b = -1.$
1.11	$a = -3,\ b = 1.$	1.12	$a = 1,\ b = 1.$
1.13	$a = -3,\ b = 2.$	1.14	$a = 2,\ b = 2.$
1.15	$a = -1,\ b = 0.$		

2 Покажите, что отображение φ, состоящее в умножении всех матриц линейного пространства $M_2(\mathbb{R})$ справа на матрицу A, является линейным оператором пространства $M_2(\mathbb{R})$. Найдите матрицу этого линейного оператора

в базисе
$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.1 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. 2.2 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

2.3 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. 2.4 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$.

2.5 $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. 2.6 $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

2.7 $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. 2.8 $A = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

2.9 $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. 2.10 $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2.11 $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. 2.12 $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2.13 $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. 2.14 $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2.15 $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

3 В линейном пространстве $\mathbb{R}_2[x]$ задан линейный оператор $\varphi : f(x) \mapsto f(x-a) - f(x-b)$, для любого многочлена $f(x) \in \mathbb{R}_2[x]$, a, b — числа из задания 1. Найдите матрицу этого оператора в базисе x^2, x, 1. Вычислите $\mathrm{Ker}\ \varphi$.

4 Составьте матрицу линейного оператора φ в базисе $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ действительного линейного пространства V, если оператор φ векторы $\bar{x}_1 = a\bar{e}_1 - \bar{e}_2 + \bar{e}_3$, $\bar{x}_2 = \bar{e}_1 + b\bar{e}_2 - \bar{e}_3$, $\bar{x}_3 = \bar{e}_1 - \bar{e}_2 - a\bar{e}_3$ переводит соответственно в векторы $\bar{y}_1 = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 + b\bar{e}_3$, $\bar{y}_2 = a\bar{e}_2 + \bar{e}_3$, $\bar{y}_3 = \bar{e}_1 + b\bar{e}_3$, где a, b — числа из задания 1. Найдите образ вектора

$\bar{z} = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 + 3\bar{e}_3$ под действием оператора φ.

5 В базисе $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ действительного линейного пространства V линейный оператор φ имеет матрицу B. Найдите матрицу оператора φ в базисе $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, если $\bar{e}_1 = -3\bar{a}_1 + 5\bar{a}_2$, $\bar{e}_2 = -\bar{a}_1 + 2\bar{a}_2$.

5.1 $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. 5.2 $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$.

5.3 $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. 5.4 $B = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

5.5 $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. 5.6 $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

5.7 $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. 5.8 $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

5.9 $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. 5.10 $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

5.11 $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. 5.12 $B = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

5.13 $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$. 5.14 $B = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

5.15 $B = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$.

6 В действительном линейном пространстве V линейный оператор φ задан матрицей C. Найдите базисы ядра и образа линейного оператора φ. Укажите ранг и дефект оператора φ.

6.1 $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -3 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$. 6.2 $C = \begin{pmatrix} 4 & -8 & -4 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

6.3 $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -4 & -2 & 6 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. 6.4 $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.

6.5 $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. 6.6 $C = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \\ 1 & -6 & -3 \end{pmatrix}$.

6.7 $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & -5 \end{pmatrix}$. 6.8 $C = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 8 & -6 & -2 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}$.

6.9 $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. 6.10 $C = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ -1 & -5 & 3 \\ 2 & 10 & -6 \end{pmatrix}$.

6.11 $C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & -5 & 1 \end{pmatrix}$. 6.12 $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$.

6.13 $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$. 6.14 $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

6.15 $C = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ -4 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

7 В некотором базисе линейного пространства $\mathbb{R}^2$ линейные операторы f и g имеют матрицы A и B соответственно, где A — матрица из задания 2, а B — матрица из задания 5. Найдите матрицы операторов $-4f+3g$, gf, f^{-1} в том же базисе пространства $\mathbb{R}^2$.

Литература

1. *Беняш-Кривец, В. В.* Лекции по алгебре: группы, кольца, поля: учебное пособие для студентов математических специальностей / В. В. Беняш-Кривец, О. В. Мельников. — Минск: БГУ, 2008.
2. *Бузланов, А. В.* Алгебра и теория чисел. Линейная алгебра : практическое пособие по выполнению лабораторных работ для студентов математических специальностей вузов / А. В. Бузланов, С. Ф. Каморников, В. С. Монахов. — Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2008.
3. *Бурдун, А. А.* Сборник задач по алгебре и геометрии / А. А. Бурдун, Е. А. Мурашко, М. М. Толкачев, А. С. Феденко. — Минск: Университетское, 1999.
4. *Кострикин, А. И.* Введение в алгебру: в 3 ч. / А. И. Кострикин. — М.: Физматлит, 2004.
5. *Милованов, М. В.* Алгебра и аналитическая геометрия / М. В. Милованов, Р. И. Тышкевич, А. С. Феденко. — Минск: Амалфея, 2001.
6. *Монахов, В. С.* Введение в теорию конечных групп и их классов / В. С. Монахов. — Минск: Вышэйш. шк., 2006.
7. *Монахов, В. С.* Алгебра и теория чисел: практикум: учеб. пособие. В 2 ч. Ч. 1 / В. С. Монахов, А. В. Бузланов. — Минск: Изд. центр БГУ, 2007.
8. Сборник задач по алгебре / под ред. Кострикина А.И. — М.: Физматлит., 2001.
9. *Шнеперман, Л. Б.* Курс алгебры и теории чисел в задачах и упражнениях: в 2 ч. / Л. Б. Шнеперман. — Минск: Вышэйш. шк., 1986–1987.
10. *Шнеперман, Л. Б.* Сборник задач по алгебре и теории чисел / Л. Б. Шнеперман. — Минск: Вышэйш. шк., 2008.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Бузланов Александр Васильевич
Монахов Виктор Степанович
Подгорная Виктория Валерьевна
Сохор Ирина Леонидовна

ГЕОМЕТРИЯ И АЛГЕБРА. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

ПРАКТИКУМ

в четырех частях
для студентов математических
специальностей вузов.
Часть 2

В авторской редакции

Отпечатано с оригинала-макета на ризографе
учреждения образования
"Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины"
246019, г. Гомель, ул. Советская, 104